

Аналитическая геометрия кристаллической горной породы

Войтеховский Ю.Л.^{1,2}, Захарова А.А.²

¹ Геологический институт ФИЦ КНЦ РАН, Апатиты, woyt@geoksc.apatity.ru

² Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург

Аннотация. Статья развивает метод структурной индикатрисы для типизации петрографических структур. Предложено алгебраическое уравнение состояния горной породы с коэффициентами – вероятностями тернарных межзерновых контактов. На примере биминеральных кристаллических горных пород установлен изоморфизм типовых петрографических структур и кривых 3-го порядка, связанных непрерывными и дискретными переходами. Показано, что важной классификационной границей служит равновесие Харди-Вайнберга, соотносимое с массивными текстурами.

Ключевые слова: кристаллическая горная порода, петрографическая структура, уравнение состояния, структурная индикатриса, равновесие Харди-Вайнберга.

Analytical geometry of crystalline rock

Voytekhovsky Y.L.^{1,2}, Zakharova A.A.²

¹ Geological Institute of FRC KSC RAS, Apatity, woyt@geoksc.apatity.ru

² Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg

Abstract. The article develops the structural indicatrix method for typing petrographic structures. An algebraic equation of state of a rock with coefficients – probabilities of ternary intergrain contacts is proposed. On the example of bimineral crystalline rocks, the isomorphism of typical petrographic structures and curves of the 3rd order, connected by continuous and discrete transitions, has been established. It is shown that the Hardy-Weinberg equilibrium correlated with massive textures serves as an important classification boundary.

Key words: crystalline rock, petrographic structure, equation of state, structural indicatrix, Hardy-Weinberg equilibrium.

Структура и текстура – неотъемлемые атрибуты горной породы (Петрографический словарь, 1981), обязательные при ее стандартном описании (Петрографический кодекс..., 2008). Первая характеризует отношения минеральных зерен, вторая – их разного вида кластеров. Редкие авторы задаются вопросом, всегда ли можно разделить эти категории (Штейнберг, 1957). Генетическая интерпретация структур состоит в сравнительном анализе степени идиоморфизма минеральных индивидов различных видов, текстур – в выделении их парагенетических ассоциаций (Бетехтин и др., 1958, 1964). Современная описательная систематика насчитывает их неопределенное число порядка несколько сотен (Шахов, 1961; Исаенко, 1964; Половинкина, 1966). При этом в стороне остаются фундаментальные вопросы о горной породе как системе со строго определенными элементами и отношениями и возможности единого описания всего многообразия структур и текстур.

Авторы рассматривают кристаллическую горную породу как связный агрегат неопределенно большого числа минеральных индивидов в общем случае различных видов. В соответствии с общей теорией систем, при данном составе их структуры в первую очередь определяются разнообразием межэлементных отношений, во вторую – их интенсивностями. То есть, при фиксированном модальном составе горной породы специфика рисунка межзерновых границ, схватываемая термином структура, в первую очередь определяется статистикой межзерновых контактов, во вторую – их метрикой. В этом – принципиальное отличие от подхода, разделяющего систему межзерновых границ на фрагменты, идиоморфные или ксеноморфные для контактирующих индивидов.

Топология межзерновых границ редко обсуждается в петрографии (Вернон, 1980), гораздо чаще – в металлургии (Салтыков, 1958; Беленький, 1980). Между тем, здесь есть строгие закономерности. В горных породах, металлах и сплавах есть бинарные (по поверхностям), тернарные (тройные по ребрам) и куотернарные (четверные в точках) межзерновые контакты, статистики которых

связаны определенными соотношениями. Очевидна и генетическая подоплека – все границы суть дефекты кристаллических структур, зоны обрыва химических связей, каналы свободной энергии. После установления физико-химического равновесия в горной породе наступает период дополнительной минимизации свободной энергии межзерновых границ. Результат особенно заметен в мономинеральных горных породах (мраморах, кварцитах), фирновом льде, керамике, отожженных металлах и сплавах. В них реализуется «структура Коксетера» сухой пены вопреки требованиям кристаллических решеток (Жабин, 1979, с. 45-76).

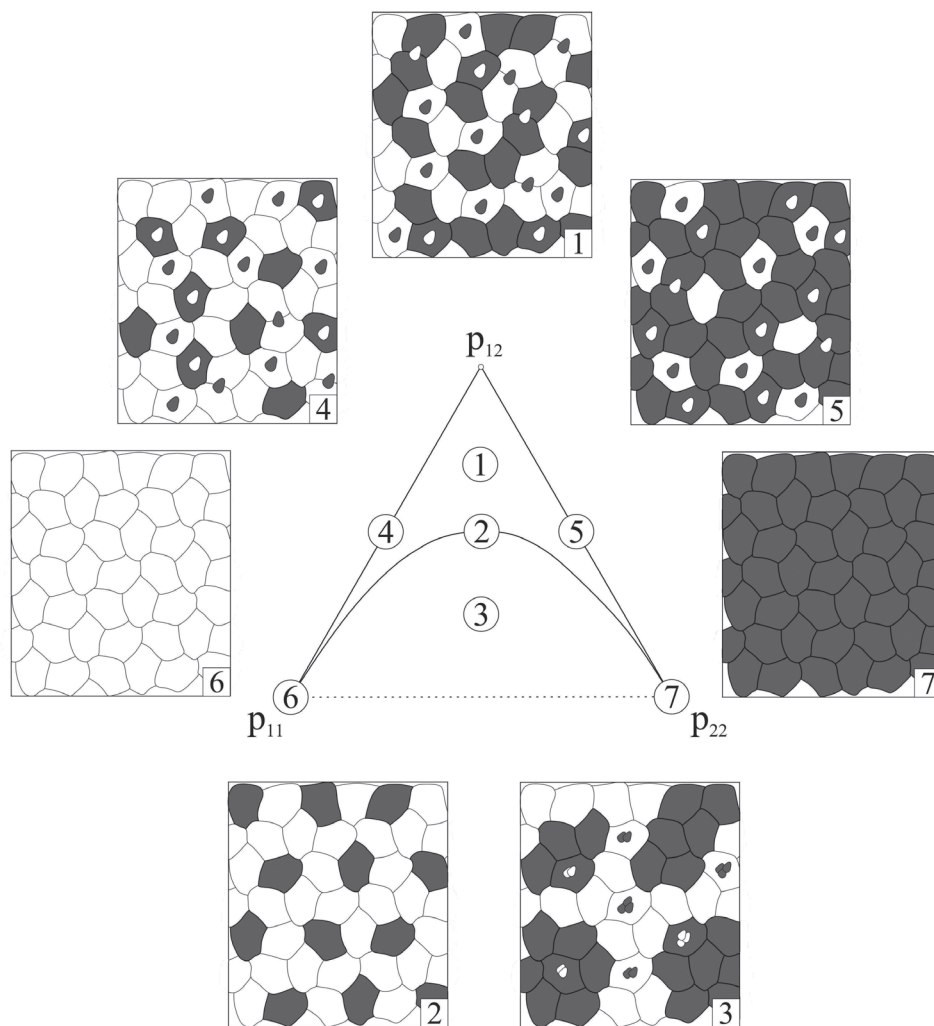


Рис. 1. Барицентрический треугольник вероятностей $\{p_{11}, p_{12}, p_{22}\}$, линия равновесия Харди-Вайнберга и типовые петрографические структуры. Состояния $p_{12} = 1$ и $p_{11} + p_{22} = 1$ (пунктирное ребро без вершин) невозможны.

Fig. 1. Barycentric triangle of probabilities $\{p_{11}, p_{12}, p_{22}\}$, Hardy-Weinberg equilibrium line and typical petrographic structures. States $p_{12} = 1$ and $p_{11} + p_{22} = 1$ (dotted edge without vertices) are impossible.

Организация горной породы (система межзерновых границ) в самом общем виде представляема как многозначный автоморфизм (отображение в себя) множества минеральных видов, реализованных в слагающих ее минеральных индивидах:

$$\{m_i\}_1^n \xrightarrow{P_{ij}} \{m_i\}_1^n$$

Профессор Д.П. Григорьев не устал повторять, что понятие «минерал» подразумевает сразу два смысла: «минеральный вид» и «минеральный индивид», различаемые из контекста. Указанный автоморфизм как раз и определяет их диалектику.

Статистика бинарных межзерновых контактов представима в виде уравнения состояния горной породы $\sum_i \sum_j p_{ij} m_i m_j = 1$, где $i, j = 1, \dots, n$, произведение $m_i m_j$ имеет смысл контакта минералов m_i и m_j , вероятности p_{ij} – коэффициенты квадратичной формы. Матричная запись уравнения выявляет ведущую роль симметрической матрицы P_{ij} :

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} = E$$

В статьях (Войтеховский, 1995, 2000) формальным выражением петрографической структуры определена каноническая диагональная форма матрицы P_{ij} (Ефимов, 1963; Боревич, 1988). Доказана теорема: в силу условия $p_{ij} \geq 0$ для n -минеральных горных пород возможны n типовых структур S_n^m , где $m = 1, \dots, n$ – число положительных элементов в канонической диагональной форме матрицы P_{ij} . Квадратичная поверхность, задаваемая уравнением состояния, названа структурной индикатрисой горной породы. Для биминеральных горных пород ситуация показана в барицентрическом треугольнике $\{p_{11}, p_{12}, p_{22}\}$ (рис. 1, 2). Разделительной границей двух возможных типов здесь служит равновесие Харди-Вайнберга (Стюарт, 1980) $p_{11} = p_1^2, p_{12} = 2p_1 p_2, p_{22} = p_2^2$, выражающее идеальное перемешивание минеральных зерен при любом модальном составе $\{p_1, p_2\}$ горной породы

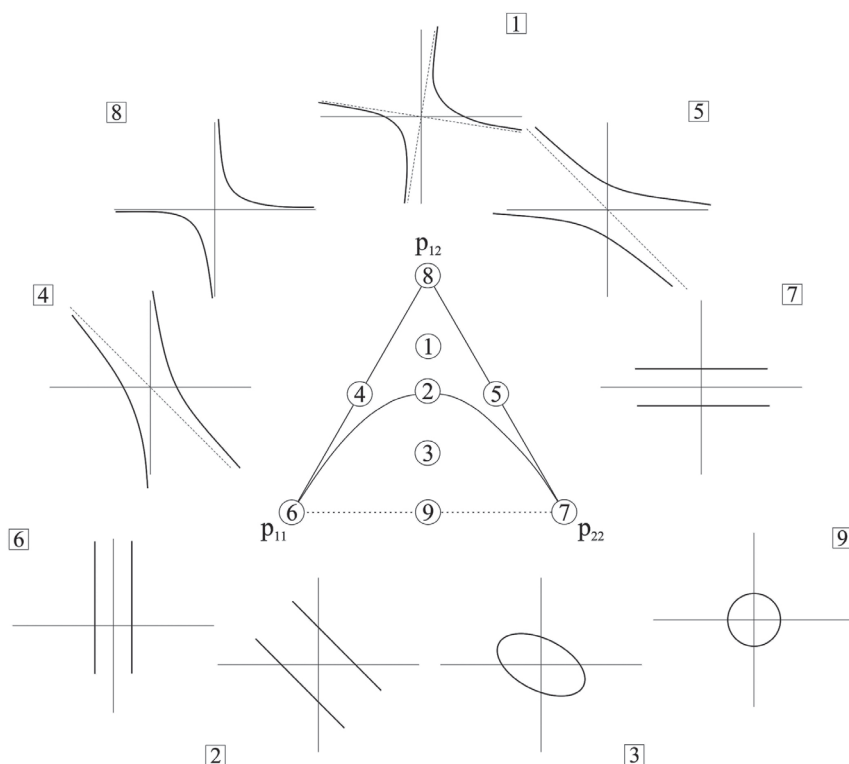


Рис. 2. Барицентрический треугольник вероятностей $\{p_{11}, p_{12}, p_{22}\}$ и структурные индикатрисы. Номера соответствуют рис. 1.

Fig. 2. Barycentric triangle of probabilities $\{p_{11}, p_{12}, p_{22}\}$ and structural indicatrices. The numbers correspond to fig. 1.

(гомогенные структуры) и, вероятно, отвечающее массивной текстуре. Структура, как она определена выше – инвариант организации горной породы, варибельной в пределах поля диаграммы. Переход через границу Харди-Вайнберга меняет ее качественно.

Для тех же биминеральных горных пород уравнение состояния $\sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk} m_i m_j m_k = 1$, где $i, j, k = 1, \dots, n$, произведение $m_i m_j m_k$ имеет смысл контакта минералов $m_i m_j$ и m_k , а вероятности p_{ijk} – коэффициенты кубической формы, позволяет построить еще более фундаментальную (так как p_{ij} вычисляемы по p_{ijk}) систематику структур. Барицентрический тетраэдр вероятностей $\{p_{111}, p_{112}, p_{122}, p_{222}\}$ с типовыми структурами и их индикатрисами 3-го порядка (Савелов, 2002) показан на рис. 3 и 4.

Таким образом, предложенное уравнение состояния позволяет охватить единым математическим формализмом огромное разнообразие кристаллических горных пород. На примере биминеральных горных пород показано, как структурные индикатрисы 2-го (для бинарных контактов) и 3-го (для тернарных контактов) порядков сохраняют топологический тип в определенных полях барицентрических диаграмм и изменяются скачком на естественных границах, не зависящих от произвола исследователя.

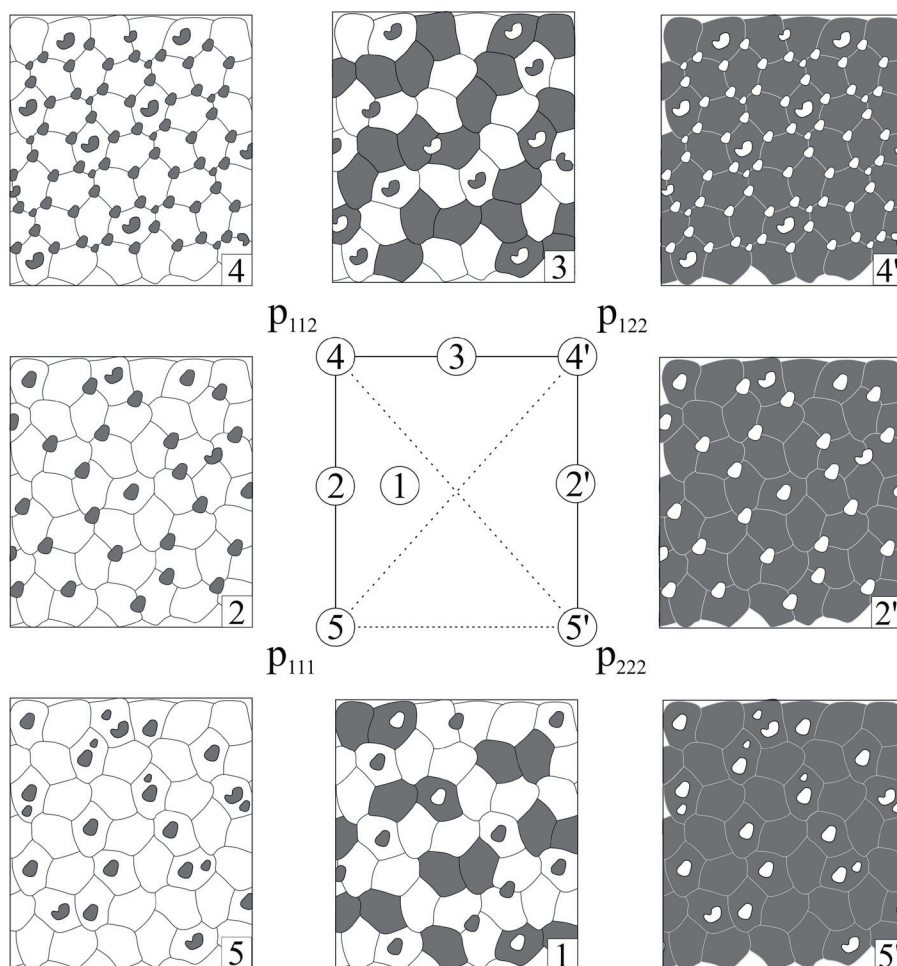


Рис. 3. Барицентрический тетраэдр вероятностей $\{p_{111}, p_{112}, p_{122}, p_{222}\}$, линии равновесия Харди-Вайнберга и типовые петрографические структуры. Состояния $p_{112} = 0$ (без ребра $p_{122} + p_{222} = 1$) и $p_{122} = 0$ (без ребра $p_{112} + p_{111} = 1$) невозможны.

Fig. 3. Barycentric tetrahedron of probabilities $\{p_{111}, p_{112}, p_{122}, p_{222}\}$, Hardy-Weinberg equilibrium lines and typical petrographic structures. States $p_{112} = 0$ (without the edge $p_{122} + p_{222} = 1$) and $p_{122} = 0$ (without the edge $p_{112} + p_{111} = 1$) are impossible.

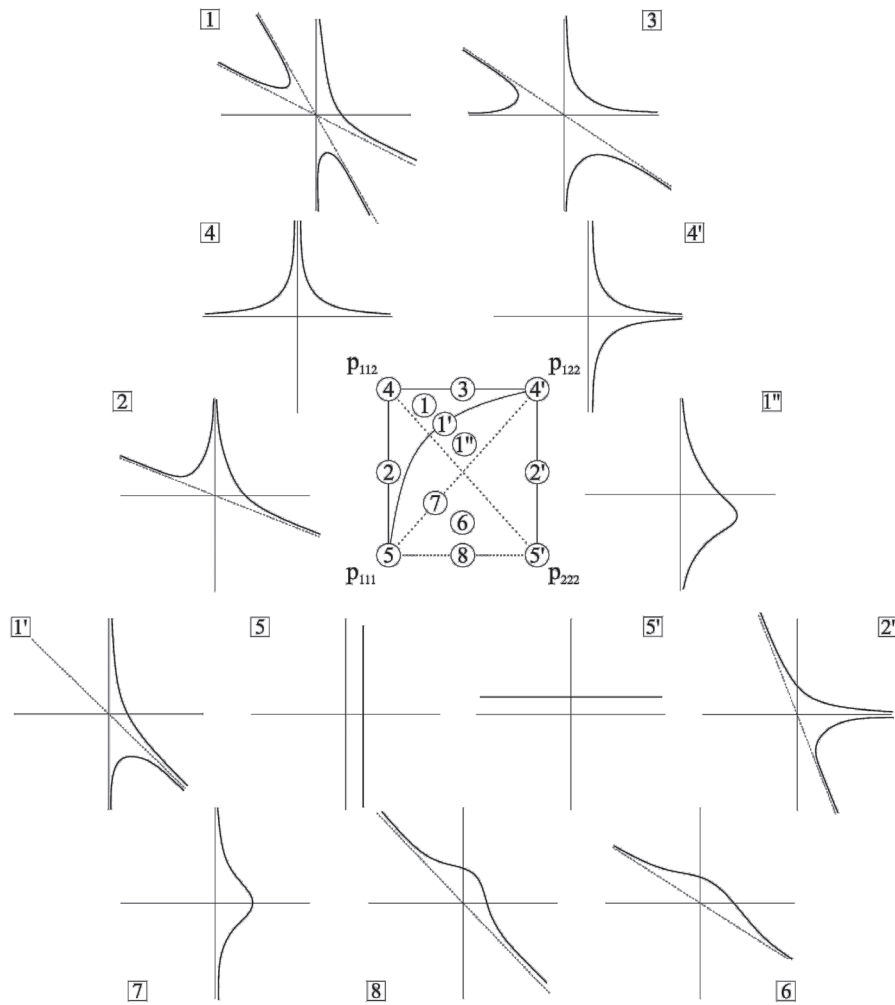


Рис. 4. Барицентрический тетраэдр вероятностей $\{p_{111}, p_{112}, p_{122}, p_{222}\}$ и структурные индикатрисы. Номера соответствуют рис. 3.

Fig. 4. Barycentric tetrahedron of probabilities $\{p_{111}, p_{112}, p_{122}, p_{222}\}$ and structural indicatrices. The numbers correspond to fig. 3.

Важная граница – равновесие Харди-Вайнберга, по-видимому, отвечающее массивным текстурам при любых модальных составах горных пород. Строго говоря, любая массивная текстура является структурой, так как выраженные кластеры в ней отсутствуют. Парадоксальность ситуации состоит еще и в том, что указанное равновесие никогда не реализуется – фигуративная точка горной породы может попасть в поле диаграммы, но не на границу. Отнесение некоторой структуры к массивной текстуре – статистическая задача, решаемая на основе критериев согласия.

Соотношение структур и текстур еще сложнее. Так, при условии $p_{112} \approx p_{122} \approx 1/2$ пространство биминеральной горной породы неизбежно организуется как система мономинеральных цепочек, то есть как текстура в современном понимании термина. Дальнейшая задача исследования – определение структурных индикатрис и естественных классификационных границ внутри барицентрического тетраэдра $\{p_{111}, p_{112}, p_{122}, p_{222}\}$ и переход к структурам триминеральных горных пород.

По крайней мере для кристаллических горных пород, в которых корректно определены элементы (минеральные зерна) и отношения (межзерновые контакты), можно развивать структурную теорию, последовательно добавляя метрику (протяженности, площади) и физическую характеристику (удельную свободную энергию) межзерновых границ. Должны ли петрографические струк-

туры изначально иметь генетический подтекст, тем более закрепленный в номенклатуре (грано-, лепидо-, немато-, порфиристо-, пойкило-, гомео-, гетеро- и др. бластовые структуры) – вопрос дискуссионный. Но заметим, что структурная кристаллография совершенно агенетична, что и позволяет ей – через посредство кристаллохимии, шаг за шагом, с множеством оговорок насыщающей заведомо математические конструкции физико-химическими интерпретациями – быть надежной основой генетической минералогии.

Литература

1. Бельский В.З. Геометрико-вероятностные модели кристаллизации. Феноменологический подход. М. Изд-во: Наука. 1980. 88 с.
2. Бетехтин А.Г., Генкин А.Д., Филимонова А.А., Шадлун Т.Н. Текстуры и структуры руд. М. Изд-во: Госгеолтехиздат, 1958. 436 с.
3. Бетехтин А.Г., Генкин А.Д., Филимонова А.А., Шадлун Т.Н. Структурно-текстурные особенности эндогенных руд. М. Изд-во: Недра. 1964. 598 с.
4. Борович З.И. Определители и матрицы. М. Изд-во: Наука. 1988. 184 с.
5. Вернон Р.Х. Метаморфические процессы. М. Изд-во: Недра. 1980. 228 с.
6. Войтеховский Ю.Л. Приложение теории квадратичных форм к проблеме классификации структур полиминеральных горных пород // Изв. ВУЗов. Геол. и разведка. 1995. № 1. С. 32–42.
7. Войтеховский Ю.Л. Количественный анализ петрографических структур: метод структурной индикатрисы и метод вычитания аксессуаров // Изв. вузов. Геол. и разведка. 2000. № 1. С. 50–54.
8. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. М. Изд-во: Физматгиз. 1963. 160 с.
9. Жабин А.Г. Онтогенез минералов. Агрегаты. М. Изд-во: Наука. 1979. 276 с.
10. Исаенко М.П. Определитель структур и текстур руд. М. Изд-во: Недра. 1964. 156 с.
11. Петрографический кодекс России. Магматические, метаморфические, метасоматические, импактные образования. СПб. Изд-во: ВСЕГЕИ. 2008. 200 с.
12. Петрографический словарь / Ред. В.П. Петров и др. М. Изд-во: Недра. 1981. 496 с.
13. Половинкина Ю.Ир. Структуры и текстуры изверженных и метаморфических горных пород. М. Изд-во: Недра. 1966. Ч. 1. 240 с.; Ч. 2. Т. 1. 424 с.; Ч. 2. Т. 2. 272 с.
14. Савелов А.А. Классификация Ньютона. Плоские кривые: систематика, свойства, применения. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2002. С. 44–53.
15. Салтыков С.А. Стереометрическая металлография. М. Изд-во: Металлургия. 1958. 446 с.
16. Стюарт Я. Концепции современной математики. Мн.: Вышэйшая школа. 1980. 382 с.
17. Шахов Ф.Н. Текстуры руд. М. Изд-во: АН СССР. 1961. 180 с.
18. Штейнберг Д.С. Структуры горных пород. Свердловск. Изд-во: СГИ. 1957. 72 с.